

## Exercice 4

5,25 points

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on considère une suite d'évènements  $A_n$  et on note  $p_n$  la probabilité de l'évènement  $A_n$ .

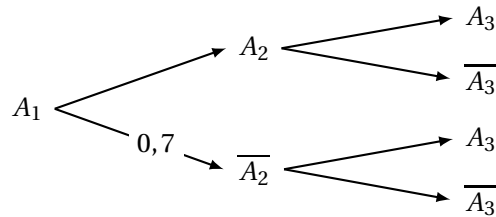
Pour les parties **A** et **B** de l'exercice, on considère que :

- Si l'évènement  $A_n$  est réalisé alors l'évènement  $A_{n+1}$  est réalisé avec une probabilité 0,3.
- Si l'évènement  $A_n$  n'est pas réalisé alors l'évènement  $A_{n+1}$  est réalisé avec une probabilité 0,7.

On suppose que  $p_1 = 1$ .

### Partie A :

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :

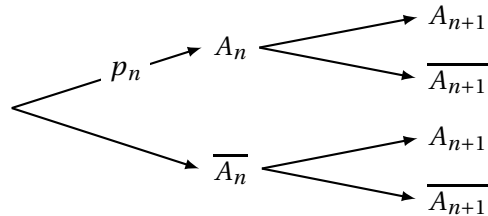


2. Montrer que  $p_3 = 0,58$ .
3. Calculer la probabilité conditionnelle  $P_{A_3}(A_2)$ , arrondir le résultat à  $10^{-2}$  près.

### Partie B :

Dans cette partie, on étudie la suite  $(p_n)$  avec  $n \geq 1$ .

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :



2. a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $p_{n+1} = -0,4p_n + 0,7$ .

On considère la suite  $(u_n)$ , définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par :

$$u_n = p_n - 0,5.$$

- b. Montrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- c. En déduire l'expression de  $u_n$ , puis de  $p_n$  en fonction de  $n$ .
- d. Déterminer la limite de la suite  $(p_n)$ .

### Partie C :

Soit  $x \in ]0 ; 1[$ , on suppose que  $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P_{A_n}(\overline{A_{n+1}}) = x$ . On rappelle que  $p_1 = 1$ .

1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $p_{n+1} = (1 - 2x)p_n + x$ .
2. Démontrer par récurrence sur  $n$  que, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$p_n = \frac{1}{2}(1 - 2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

3. Montrer que la suite  $(p_n)$  est convergente et donner sa limite.